

Chapitre 11 : Variables aléatoires réelles

I. Variable aléatoire réelle sur un ensemble fini et loi de probabilité

1) Variable aléatoire réelle

Définitions :

- Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une issue.
- L'**univers** est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement contenant une seule issue.

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'univers est l'ensemble des issues possibles, ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On considère l'événement A : "On obtient un résultat impair."

On a donc : $A = \{1, 3, 5\}$

On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 2".

On a donc : $E = \{2\}$

Définition : Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemple :

Avec l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est impair, on gagne 2€.
- Si le résultat est 6, on gagne 3€.
- Si le résultat est 2 ou 4, on perd 5€.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui peut prendre les valeurs $-5, -2, 3$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 & f(6) &= 3 \\ f(3) &= 2 & f(4) &= -5 \\ f(5) &= 2 & f(2) &= -5 \end{aligned}$$

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

Remarque :

- $P(X = x_i)$ pourra se noter p_i .
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

On peut résumer la loi d'une variable aléatoire X par un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Exemples :

1) On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	2	3	-5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

2) Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 4 €.
- Si on tire un as, on gagne 10 €.
- Si on tire le roi de pique on perd 20 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 2 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

Déterminer la loi de probabilité de X .

X prend les valeurs : 4; 10; -20; -2; -20
On a la loi de probabilité suivante:

x_i	4	10	-20	-2	-20
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{1}{32}$

II. Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

moyenne = $\bar{x}$ sur calc

- L'**espérance** de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

variance σ^2 sur calc

- La **variance** de la loi de probabilité de X est :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E(X))^2$$

écart type σ sur calc

- L'**écart-type** de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type pour la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_5 p_5 = \sum_{i=1}^5 x_i p_i \\ &= -20 \times \frac{1}{32} + -2 \times \frac{20}{32} + \dots + 14 \times \frac{1}{32} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^5 p_i (x_i - E(X))^2 \\ &\approx 33,86 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 5,8$$

x_i	-20	-2	6	10	14
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Remarques :

- L'espérance c'est la moyenne des x_i pondérée par les p_i .

En effet $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

$$= \frac{x_1 p_1 + \dots + x_n p_n}{p_1 + \dots + p_n} \quad \text{car } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

- La variance caractérise la dispersion des x_i , ou le risque d'un jeu.

Propriétés : Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

Démonstrations :

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur Ω qui prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i p_i + b p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i p_i + \sum_{i=1}^n b p_i \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i \\ &= aE(X) + b \quad \text{car } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - E(aX + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b - (aE(X) + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i [a(x_i - E(X))]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i a^2 (x_i - E(X))^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$